数理解析研究所講究録
915巻 1995年 167-170

Malfattiの問題について

東京電機大学（理工・情報）　一松　信　(Sin HITOTUMATU)

1．問題と主旨

標題の問題はイタリアのMalfatti(1803)が提出した次の課題である。　与えられた三角形の中に、それぞれ２辺に接して互いに外接する３個の円を作れ。　これは定規とコンパスで作図可能である(Steiner:1826)。　その後計算による解が多数現れている。

Malfatti自身は、与えられた三角形内にあり、互いに重ならない３個の円の合計面積を最大にする問題の解として、上記３円（Malfattiの円）を考えたが、この予想は誤っていた（後述）。

ここでこの古典的問題を取上げたのは、この種の問題に、標準的な Gröbner基底などが有用なことを例示するためである。

2．方程式

Δ ABCの内接円の半径を１と標準化し、角 A,B,C内の円 P,Q,Rの半径を x^2,y^2,z^2と置く。便宜上½A,½B,½C の余接(cot) をそれぞれ ℓ,m,nと置くと

(1)　　$\ell mn = \ell + m + n$

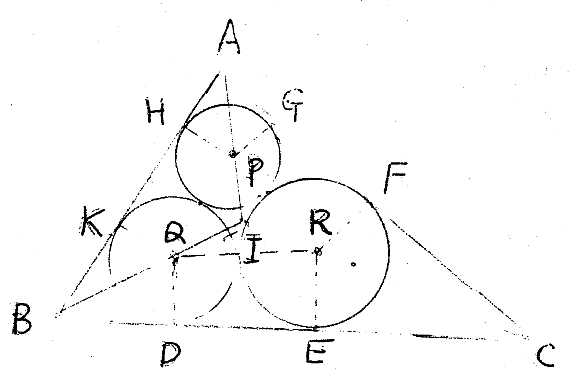

図１　Malfattiの円

であり、３辺BC,CA,ABは $m+n$, $n+\ell$, $\ell+m$ と表される。 図１で例えば

$$DE=\sqrt{(y^2+z^2)^2-(y^2-z^2)^2}=2yz$$

により、以下の連立方程式を得る。

(2) $my^2+nz^2+2yz = m+n$

(3) $nz^2+\ell x^2+2zx= n+\ell$

(4) $\ell x^2+my^2+2xy= \ell+m$

これを(1) に注意して解けばよい。

３．解法 a．古典的方法

(2),(3),(4) のような２次の連立方程式に対しては、次のような解法が古典的である。

すなわちそれぞれに定数 L.M.Nを掛け、右辺が０となり、左辺が１次式の積になるようにする。 条件(1) を活用すると、そのための条件は LMN=0となり、結局２個ずつ右辺が０になるように組合せればよい。そのような巧妙な解法が文献[2] にある。しかしこの方法では、解の組合せが厄介である。（[3] に紹介）

b．消去法 この場合にはかえって素朴な消去法がよい。以下それに従う。

まず(2)-(3) により、 $2(y-z)x =nz^2-my^2+m-n.$

これを $[(2)+(3)-(4)]\div 2$ に当る $\ell x^2+(y+z)x- yz=\ell$ に代入すると

$$\begin{aligned}
0=&\ell(nz^2-my^2+m-n)^2+ 2(nz^2-my^2+m-n)(y^2-z^2)- 4(yz+\ell)(y-z)^2\\
=&\ell(nz^2-my^2)^2+2\ell(m-n)(nz^2-my^2)+ \ell(m-n)^2+2(y^2-z^2)(nz^2-my^2)\\
&+2(m-n)(y^2-z^2)-4yz(y-z)^2-4\ell(y-z)^2 \qquad \text{(展開)}\\
=&\ell(my^2+nz^2)^2-4\ell mn\,y^2z^2- 2\ell(m+n)(my^2+nz^2)+4\ell mn(y^2+z^2)+\ell(m-n)^2\\
&-2(y^2+z^2)(my^2+nz^2)+4(m+n)y^2z^2-2(m+n)(y^2+z^2)+4(my^2+nz^2)- 4yz(y^2+z^2)\\
&+8y^2z^2- 4\ell(y^2+z^2)+ 8\ell yz, \qquad \text{(和に変形)}
\end{aligned}$$

ここで(1) を使い、my^2+nz^2 に(4) を代入すると

$$\begin{aligned}
0=&\ell(m+n-2yz)^2+4(-\ell mn+m+n+2)y^2z^2-2\ell(m+n)(m+n-2yz)+\ell(m-n)^2\\
&-2(y^2+z^2)(m+n-2yz)-2(y^2+z^2)(-2\ell mn+m+n+2\ell+2yz)+4(m+n-2yz)+8\ell yz\\
=&[\ell(m+n)^2-2\ell(m+n)^2+\ell(m-n)^2+4(m+n)]-4\ell(m+n)yz+4\ell y^2z^2+4(2-\ell)y^2z^2\\
&+4\ell(m+n)yz-2(y^2+z^2)(m+n-2yz-m-n+2yz)+8(\ell-1)yz\\
=&(-4\ell mn+4m+4n)+8y^2z^2+8(\ell-1)yz = 4[2y^2z^2+2(\ell-1)yz-\ell]
\end{aligned}$$

すなわち

(5) $2y^2z^2+2(\ell-1)yz-\ell=0$

を得る。

c．<u>注意</u>　本来ならば、y,z に関する方程式に整理し、(4) と併せてy を消去するべきである。そうするとz に関する８次方程式（実はz^2に関する４次方程式）を得る。それが正規の Gröbner基底である。実際に数式処理を使って、そのような計算ができた。

しかしその４次方程式が、代数的に奇麗に解けるのに疑問を感じて調べた結果、yzを一つの変数のようにみなすと、その２次方程式になることがわかった。これはこの問題の特殊性であるが、[2] でもyz,zx,xyについて解いている。

もとの問題では、x,y,z は０と１の間の数であり、(5) の解は

(6)　$yz = \frac{1}{2}\ [-(\ell-1)+\sqrt{\ell^2+1}]$

である。　同様に

$$zx=\frac{1}{2}\ [-(m-1)+\sqrt{m^2+1}],\qquad xy=\frac{1}{2}\ [-(n-1)+\sqrt{n^2+1}]$$

を得るので、これらから x,y,zを求めることができる。

d．<u>吟味</u>　最初の連立方程式(2),(3),(4) は、全部で８組の解（すべて実解）を有する。そのうち４組は、他の４組の符号を全部変えた値である。

上に述べたすべてが正の解の他の３組は、(6) などの３式のうち、平方根号を１個正・２個負にとり、x,y,z のうち２個を正・１個を負にした解になる。

例えば $x<0,y>0,z>0$ とした解は、y^2,z^2 が三角形内にありそれぞれ角B,C の２辺に接し、互いに外接する円の半径を表し、x^2は角A の２辺に接し三角形の外側から前の２円に外接する大きい円の半径を表す。 (6)の右辺は $\tan\frac{1}{4}A$ に相当するが、この場合には負になる右辺の値は、三角形の内角を外側の優角にとったものに相当する。

４．<u>Malfattiの円は最大か</u>?

ところでMalfattiの円は、最大面積を与えるか?　<u>反例</u>はすぐに見付かる。それは<u>正三角形</u>の場合である。

上のように内接円の半径を１とすると、Malfattiの円の半径は$\frac{1}{2}$ $(3-\sqrt{3})$である（これは直接に計算できる）。他方一つの角内にあり、内接円に外接する小円の半径は$\frac{1}{3}$であり、内接円とそのような２個の円の面積の和は$11\pi/9$である。πを除いて係数を比較すると

$$11/9 > 9(4-2\sqrt{3})/4$$

である。これは移項して２乗すると　3^9=19683>19600=140^2 に帰着される。

これはMalfattiの３円よりも、内接円とそれに隣接する２円の方が大きいことを意味する。この場合は、中学校３年の課題学習で扱うことの出来る問題である。

反例というだけならば、図２のような細長い三角形の中で、団子のように並んだ３個の円の方が明らかかもしれない。 1967 年にMalfattiの円は、いかなる三角形においても重ならない３個の円の内で、最大面積を与えないことが確認された。 真の最大は完全に証明されてはいないが、内接円とそれに隣接する２円、または団子のように並んだ３円であるらしい。 このような事実がはっきりしたのが、比較的近年なのが奇妙である。

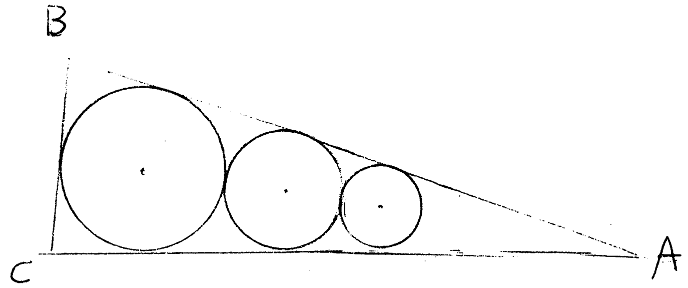

図２　別の反例

５．次の課題

研究会の折に、３次元の４面体の場合について質問があった。もっと一般のｎ次元空間での単体でも、同様の問題が考えられる。 形式的には同様に出来そうだが、はるかに複雑になるらしい。これらについては全く考えたことがなかった。次の課題としたい。

参考文献

[1] M.Gardner, Fractal Music, Hypercards and more,...,Freeman 1992, Chap.10
日本語訳，丸善から近刊予定。

[2] H.Lob & H.W.Richmond, On the Solution of Malfatti's Problem for a Triangle, Proc. of the London Math. Soc.,2, 1930, pp.287-304.

[3] 一松　信，マルファティの問題について、大学への数学、東京出版，1995年 1月号。